

Devoir commun 3

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x \ln(x) + 1$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

- 1► Déterminer la limite de la fonction f en 0 ainsi que sa limite en $+\infty$.
- 2► a► On admet que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on notera f' sa fonction dérivée.
Montrer que pour tout x strictement positif,
$$f'(x) = 1 + \ln(x)$$
b► En déduire le tableau de variations de la fonction f sur $]0; +\infty[$. On y fera figurer la valeur exacte de l'extremum de f sur $]0; +\infty[$ et ses limites.
c► Justifier que pour tout $x \in]0; 1[$, $f(x) \in]0; 1[$.
- 3► a► Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.
b► Étudier la convexité de la fonction f sur $]0; +\infty[$.
c► En déduire que pour tout réel x strictement positif,

$$f(x) \geq x$$

- 4► On définit la suite (u_n) par son premier terme u_0 élément de l'intervalle $]0; 1[$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

- a► Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a $0 < u_n < 1$.
- b► Dédire de la question 3►c► la croissance de la suite (u_n) .
- c► En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Exercice 2

On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = 5x^2 + 2x - 2x^2 \ln(x)$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan.

On admet que f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

- 1► a► Démontrer que la limite de la fonction f en 0 est égale à 0.
b► Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
- 2► Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$.
- 3► a► Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$,
$$f''(x) = 4(1 - \ln(x))$$
b► En déduire le plus grand intervalle sur lequel la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes.
c► Dresser le tableau de variations de la fonction f' sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
(On admettra que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f'(x) = 2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = -\infty$.)
- 4► a► Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet dans l'intervalle $]0; +\infty[$ une unique solution α .
b► Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α .
c► En déduire le signe de $f'(x)$ ainsi que le tableau de variations de f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
- 5► a► En utilisant l'égalité $f'(\alpha) = 0$, démontrer que :

$$\ln(\alpha) = \frac{4\alpha + 1}{2\alpha}$$

- b► En déduire que $f(\alpha) = \alpha^2 + \alpha$.
- c► En déduire un encadrement d'amplitude 10^{-1} du maximum de la fonction f .