

Devoir commun 3

Exercice 1

On arrondira les probabilités à 10^{-4} .

Lors d'un examen, on estime que $\frac{1}{20}$ des élèves trichent. On appelle T l'événement « un élève a triché ».

On suppose que le déroulement de l'épreuve pour un élève est indépendant des autres élèves. On note M l'événement « un élève a plus de la moyenne ». On estime qu'un élève qui a triché a une probabilité de 25% d'avoir plus de la moyenne, alors qu'un élève honnête a 60% de chances d'avoir plus de la moyenne.

Partie A

- 1► Représenter la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.
- 2► Déterminer la probabilité qu'un élève ait triché et ait plus de la moyenne.
- 3► Montrer que la probabilité qu'un élève ait plus de la moyenne est 0,5825.
- 4► En déduire la probabilité qu'un élève ait triché sachant qu'il a plus de la moyenne.

Partie B

On rappelle pour cette partie que la probabilité qu'un élève choisi au hasard ait triché est de $\frac{1}{20} = 0,05$.

- 1► On étudie une classe est composée de 25 élèves. On appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre d'élèves qui trichent dans la classe.
 - a► Montrer que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
 - b► Calculer la probabilité qu'aucun élève n'ait triché.
 - c► Calculer la probabilité qu'un seul élève ait triché.
 - d► Exprimer la probabilité qu'au moins 2 élèves aient triché en fonction des deux questions précédentes, puis la calculer.
- 2► On sélectionne au hasard un nombre n candidats de l'examen parmi les élèves d'un lycée. On note Y la variable aléatoire qui dénombre les élèves qui trichent dans cet échantillon.
 - a► On admet que Y suit une loi binomiale. Déterminer ses paramètres.
 - b► Donner l'expression, en fonction de n , de la probabilité qu'aucun élève n'ait triché dans cet échantillon.
 - c► En déduire le nombre minimal d'élèves à prélever pour être sûr à au moins 95% que parmi eux, au moins 1 ait triché.

Exercice 2

Soit $f(x) = \frac{\pi}{2} \sin(x)$ définie sur $\mathbb{R}$.

Partie A

- 1► Déterminer la parité de f sur $\mathbb{R}$.
- 2► Justifier que f est périodique de période 2π .
- 3► Justifier que l'on peut restreindre l'étude de f à $[0; \pi]$.
- 4► Dresser le tableau de variations de f sur $[0; \pi]$.
- 5► Déterminer la convexité de f sur $[0; \pi]$.
- 6► On considère l'équation $f(x) = x$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
 - a► Vérifier que 0 et $\frac{\pi}{2}$ sont solutions de cette équation.
 - b► Tracer une allure du graphe de f sur $[-\pi; \pi]$ sur l'**annexe** fournie avec le sujet.
 - c► En déduire graphiquement que 0 et $\frac{\pi}{2}$ sont les seules solutions de l'équation sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Partie B

Soit la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = \frac{\pi}{12}, \quad \text{et pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

- 1► Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \frac{\pi}{2}$.
- 2► En déduire la convergence de (u_n) .
- 3► a► Recopier et compléter la fonction Python ci-dessous qui détermine la plus petite valeur N telle que $u_N > 0,95$.

```

1  def seuil():
2      u = pi/12
3      n = 0
4      while . . . . .
5          u = . . . . .
6          n = . . . . .
7      return . . . . .

```

- b► Déterminer la valeur de N .
- 4► Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Exercice 3

- 1► Pour chaque couple de fonctions dire si l'une est une primitive de l'autre. Justifier.

- a► $f : x \mapsto 2x^4 + 5x^2 - 7x + 3$ et $g : x \mapsto 8x^3 + 10x - 7$
- b► $f : x \mapsto \ln(x)$ et $g : x \mapsto x \ln(x) + x$
- c► $f : x \mapsto 5e^x$ et $g : x \mapsto e^{5x}$
- d► $f : x \mapsto \sin(x)$ et $g : x \mapsto \cos(x)$

- 2► Soit $f : x \mapsto \frac{1}{2x^2 - 2x - 4}$.

- a► Justifier que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{(x+1)(x-2)}$.
- b► Déterminer deux entiers α et β tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{x-2}$$

- c► En déduire l'unique primitive F de f sur $]2; +\infty[$ vérifiant $F(3) = 0$.
- d► (Bonus) Quel est l'ensemble des primitives de f sur $] -1; 2[$?

- 3► Déterminer l'ensemble des primitives des fonctions suivantes :

- a► $f : x \mapsto (2x - 5)(x^2 - 5x + 3)^3$
- b► $f : x \mapsto xe^{-x^2/2}$
- c► $f : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
- d► $f : x \mapsto \sin(7x) - 11 \cos(11x + 52)$

Annexe

NOM Prénom : _____

