

Sujet du devoir maison 2

« Si les gens ne croient pas que les mathématiques sont simples, c'est uniquement parce qu'ils ne réalisent pas à quel point la vie est compliquée » (John VON NEUMANN, 1903-1957)

Exercice 1 : Souris chapardeuse

Alice a stocké dans son grenier une réserve de petits cubes de fromage mais il s'aperçoit que son stock diminue. En effet, une souris a découvert sa réserve, et chaque jour, elle mange la moitié des petits cubes restants, plus un qu'elle garde pour la nuit. Au soir du quinzième jour, il n'y a plus aucun petit cube de fromage !

Combien de petits cubes de fromage Alice avait-elle au départ stocké dans sa réserve ?

*Vous pouvez utiliser un tableur ou un algorithme pour conjecturer la réponse au problème.
Votre démarche devra être clairement justifiée.*

Exercice 2 : Étude d'une somme

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geq 1$ par $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k(k-1)$.

Étude expérimentale

- 1► À l'aide d'un tableur, calculer les 30 premiers termes de cette suite puis en afficher une représentation graphique.
- 2► Quelle conjecture sur l'expression de u_n l'allure du nuage de points obtenu permet-elle de faire ?
- 3► À l'aide du tableur, afficher les 10 premiers termes et une représentation graphique de la suite (v_n) où $v_n = 3u_n$.
- 4► Conjecturer, en fonction de n , une expression de v_n , et en déduire une conjecture de l'expression de u_n .

Envoyez votre fichier tableur à votre professeur.

Étude mathématique

Démontrez par récurrence que l'expression de u_n conjecturée précédemment est valable pour tout entier $n \geq 1$.

Exercice 3 : Limite d'une somme

La suite (u_n) est donnée par son terme général $u_n = \frac{n}{n^1 + 1} + \frac{n}{n^2 + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n} = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k}$.

Démontrer que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

On pourra chercher à utiliser le théorème des gendarmes...