

Sujet du devoir maison 4

Étude du tétraèdre régulier

Dans tout le problème, on se place dans un repère orthonormé. On note $A(-3; 0; 0)$, $B(0; -3; 0)$, $C(0; 0; 3)$, $D(-3; -3; 3)$. On admet que $ABCD$ est un tétraèdre régulier. On note :

- ▶ E le projeté orthogonal de D sur (ABC) .
- ▶ F le projeté orthogonal de B sur (ACD) .
- ▶ G le projeté orthogonal de A sur (BCD) .
- ▶ H le projeté orthogonal de C sur (ABD) .

1▶ L'objectif de cette question est de justifier que les coordonnées de H sont $(-2; -2; 1)$.

a▶ Justifier que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires.

b▶ On note $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur normal à (ABD) . Justifier que :

$$\begin{cases} 3a - 3b = 0 \\ -3b + 3c = 0 \end{cases}$$

c▶ En prenant $b = 1$, justifier que $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ un vecteur normal à (ABD) .

d▶ En déduire que $x + y + z + 3 = 0$ est une équation cartésienne de (ABD) .

e▶ En déduire que :

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t + 3 \end{cases}$$

est une représentation paramétrique de la droite orthogonale à (ABD) passant par C .

f▶ En déduire que H a pour coordonnées $(-2; -2; 1)$.

2▶ L'objectif de cette question est de justifier que les coordonnées de E sont $(-1, -1, 1)$.

a▶ Justifier que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

b▶ Justifier que $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est normal à (ABC) .

c▶ Conclure.

3▶ L'objectif de cette question est de vérifier que les coordonnées de G sont $(-1, -2, 2)$. Pour cela, on va noter $M(-1, -2, 2)$ et montrer que $M = G$.

a▶ Justifier que $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$ ne sont pas colinéaires.

b▶ On note $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur normal à (BCD) . Justifier que :

$$\begin{cases} 3b + 3c = 0 \\ -3a + 3c = 0 \end{cases}$$

- c► En prenant $c = 1$, justifier que $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ un vecteur normal à (BCD) .
- d► En déduire que $x - y + z - 3 = 0$ est une équation cartésienne de (BCD) .
- e► Justifier que $M \in (BCD)$.
- f► Justifier que (AM) est orthogonale à (BCD) .
- g► En déduire que $M = G$.
- 4► On admettra que les coordonnées de F sont $(-2; -1; 2)$. Justifier que $EFGH$ est un tétraèdre régulier en montrant que ses six arêtes sont de même longueur.
- 5► L'objectif de cette question est de déterminer le volume de $EFGH$.
- a► Déterminer l'aire de ABC .
- b► Déterminer la distance entre D et ABC .
- c► En déduire le volume de $ABCD$.
- d► Le tétraèdre $EFGH$ est une réduction de $ABCD$: déterminer le facteur de réduction, c'est-à-dire la constante k telle que les longueurs de $EFGH$ sont égales à k fois les longueurs de $ABCD$ (par exemple, k est tel que $EF = kAB$).
- e► Si les longueurs sont multipliées par k , par quel facteur les volumes sont-ils multipliés ?
(Indication : si on double le côté d'un cube, par quel facteur est multiplié son volume ? Prenez un exemple...)
- f► En déduire une expression du volume de $EFGH$ en fonction de celui de $ABCD$ et de k .
- g► En déduire le volume de $EFGH$.
- 6► On note I le milieu de $[BD]$.
- a► Justifier que les coordonnées de I sont $\left(-\frac{3}{2}; -3; \frac{3}{2}\right)$.
- b► Déterminer une mesure arrondie au dixième de degré de l'angle $(\vec{IA}; \vec{IC})$.

Identité du parallélogramme

À l'aide des formules de polarisation, démontrer que pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$,

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2)$$

Formule fondamentale du produit scalaire

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée de l'espace. Soit $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ (avec x, y et z trois réels).

Justifier que :

$$\vec{u} = (\vec{u} \cdot \vec{i})\vec{i} + (\vec{u} \cdot \vec{j})\vec{j} + (\vec{u} \cdot \vec{k})\vec{k}$$