

Corrigé du devoir surveillé 1

Exercice 1

- 1► La fonction f est une fonction polynôme de degré 2, de racines 0 et 1, et de coefficient dominant $-2 < 0$, donc le sommet de son graphe est son maximum, atteint en $\frac{0+1}{2} = 0,5$, où f vaut $f(0,5) = 0,5$. Le tableau de variation de f est donc le suivant :

x	$-\infty$	0	0,5	1	$+\infty$
f	$-\infty$	0	0,5	0	$-\infty$

Par ailleurs, $\forall x \in [0; 1], f(x) \in [0; 0,5]$.

- 2► Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}_n$: « $u_n \leq u_{n+1} \leq 0,5$ ».

INIT Remarquons que $u_1 = f(u_0) = f(0,2) = 0,32$ donc $u_0 \leq u_1 \leq 0,5$.

HYP Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}_n$ vraie.

D'après $\mathcal{P}_n$,

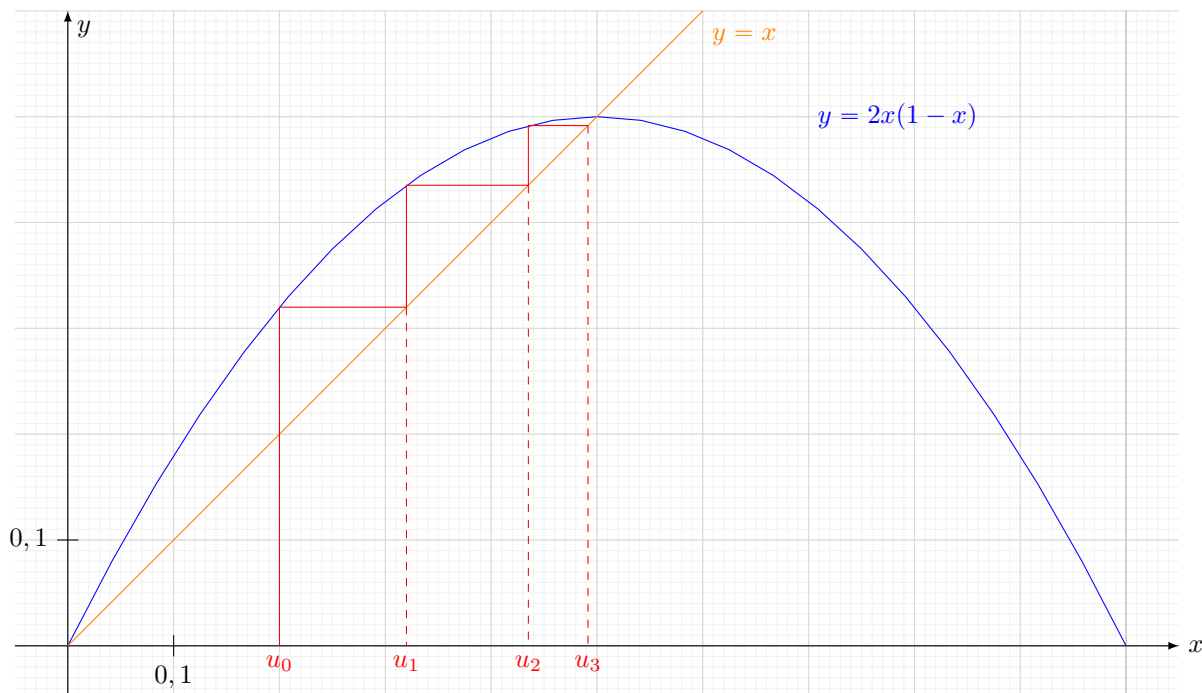
HÉRÉDITÉ

$$\begin{array}{lll} & u_n \leq u_{n+1} \leq 0,5 \\ \text{Donc} & f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(0,5) & (\text{car } f \text{ est croissante sur }]-\infty; 0,5]) \\ \text{Donc} & u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 0,5 \end{array}$$

Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

CCL On a montré que $\mathcal{P}_0$ est vraie et que $\mathcal{P}_n$ est héréditaire, donc d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$ est vraie, c'est-à-dire que $u_n \leq u_{n+1} \leq 0,5$.

- 3► Annexe :



Exercice 2

Soit $ABCDEFGH$ un cube.

1► Justifier que $\mathcal{R} = (A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est un repère de l'espace.

Soient I le milieu de $[AB]$ et J le point tel que $\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.

L'objectif est de montrer que les points I , J et G sont alignés.

- 1► Les points A , B et D sont non alignés et appartiennent à la face $ABCD$, et le point E n'appartient pas à $ABCD$, donc A , B , D et E ne sont pas coplanaires, donc $\mathcal{R}$ est un repère de l'espace.
- 2► Comme $A(0; 0; 0)$ et $B(1; 0; 0)$, les coordonnées du milieu I de $[AB]$ sont :

$$\left(\frac{0+1}{2}; \frac{0+0}{2}; \frac{0+0}{2} \right) = \left(\frac{1}{2}; 0; 0 \right)$$

On lit directement dans la définition de J que ses coordonnées sont $J\left(\frac{3}{4}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Comme $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ (on utilise la relation de Chasles puis les égalités vectorielles dans un cube), donc $G(1; 1; 1)$.

3► D'après la question précédente,

$$\overrightarrow{IJ} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - 0 \\ \frac{1}{2} - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{IG} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2} \\ 1 - 0 \\ 1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4► On remarque que $\overrightarrow{IG} = 4\overrightarrow{IJ}$, donc I , J et G sont alignés.

Exercice 3

- 1► Comme $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = (2a + 2b + 2c)\vec{i} + (b - c)\vec{j} + (4a - b + 5c)\vec{k}$, les coordonnées de ce vecteur dans $\mathcal{B}$ sont $\begin{pmatrix} 2a + 2b + 2c \\ b - c \\ 4a - b + 5c \end{pmatrix}$.
- 2► Un vecteur est nul si, et seulement si ses trois coordonnées sont nulles, d'où le système.
- 3► D'après la deuxième équation, $c = b$. En substituant alors b à c dans la première équation que l'on divise par 2, on trouve $a = -2b$. En substituant b à c et $-2b$ à a , la troisième équation devient $-3b = 0$, finalement $\boxed{a = b = c = 0}$.
- 4► Par conséquent, $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement indépendants, donc non coplanaires, donc forment une base de l'espace.

Exercice 4

- 1► Comme I et J sont les milieux de $[AB]$ et $[BC]$, d'après la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{BJ} = 2(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BJ}) = 2\overrightarrow{IJ}$$

- 2► Comme K et L sont les milieux de $[CD]$ et $[DA]$, d'après la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{LD} + 2\overrightarrow{DK} = 2(\overrightarrow{LD} + \overrightarrow{DK}) = 2\overrightarrow{LK}$$

- 3► D'après les questions précédentes, $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$ donc $IJKL$ est un parallélogramme.

Problème

Partie A : premier modèle

- 1► La température à l'intérieur de la maison baisse de $2,7^\circ$ en 10 heures, et selon ce modèle la diminution de température baisse à rythme constant, donc de $0,27^\circ$ par heure. Le lendemain à 22h00, soit 24 heures après une température enregistrée de 20° , la température serait de $20^\circ - 24 \times 0,27^\circ = 13,52^\circ$.
- 2► Suivant la même logique, la température diminuerait indéfiniment : par exemple, au bout de 1000 heures, la température serait de -2680° , ce qui est absurde (en plus d'être physiquement impossible...). Donc ce modèle n'est pas pertinent.

Partie B : second modèle

- 1► Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+1} = T_n - 0,02(T_n - 5) = \boxed{0,98T_n + 0,1}$.
- 2► D'après la formule de la question précédente,
- $T_1 = 0,98T_0 + 0,1 = 19,7^\circ$: à 23h00, il faisait $19,7^\circ$ dans la maison.
 - $T_2 = 0,98T_1 + 0,1 \approx 19,4^\circ$: à 00h00, il faisait environ $19,4^\circ$ dans la maison.
- 3► a► Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}_n$: « $T_n \geq 5$ ».

INIT La propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie car $T_0 = 20 \geq 5$.

HYP Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}_n$ vraie.

D'après $\mathcal{P}_n$,

$$\begin{array}{ll}
 & T_n \geq 5 \\
 \text{Donc} & 0,98T_n \geq 0,98 \times 5 \quad (\text{car } 0,98 > 0) \\
 \text{Donc} & 0,98T_n + 0,1 \geq 0,98 \times 5 + 0,1 \\
 \text{Donc} & T_{n+1} \geq 5
 \end{array}$$

Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

On a montré que $\mathcal{P}_0$ est vraie et que $\mathcal{P}_n$ est héréditaire, donc d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$ est vraie, c'est-à-dire que $T_n \geq 5$.

- b► Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n \geq 5$, il vient que $T_n - 5 \geq 0$, donc $T_{n+1} - T_n = -0,02(T_n - 5) \leq 0$, donc (T_n) est décroissante.
- c► C'est cohérent, car on s'attend à ce que la température intérieure baisse sans pour autant passer en-dessous de la température extérieure.
- 4► a► Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = T_{n+1} - 5 = 0,98T_n + 0,1 - 5 = 0,98T_n - 4,9 = 0,98(T_n - 5) = 0,98U_n$ donc (U_n) est géométrique de raison 0,98 et de premier terme $U_0 = T_0 - 5 = 15$.
- b► Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = 15 \times 0,98^n$ donc $T_n = U_n + 5 = \boxed{5 + 15 \times 0,98^n}$.
- 5► D'après la relation du début, $T_1 - T_0 = -k(T_0 - 5)$ donc $k = -\frac{T_1 - T_0}{T_0 - 5} = -\frac{20 - 19,85}{20 - 5} = \boxed{0,01}$ d'après les données du tableau.