

Devoir surveillé 1

Vous disposez de 1h50 pour effectuer le travail.

Vous pouvez traiter les exercices dans l'ordre de votre choix.

L'utilisation d'une calculatrice graphique est autorisée.

Tout document extérieur est interdit.

Si vous pensez que le sujet contient une erreur, indiquez-le et répondez à la question en conséquence.

Toute trace de recherche sera évaluée.

Soignez votre rigueur de rédaction : privilégiez la qualité à la quantité...

Sujet du devoir surveillé 1

Exercice 1

On considère la fonction $f : x \mapsto 2x(1 - x)$ définie sur $[0; 1]$, et la suite (u_n) définie par $u_0 = 0,2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

- 1► Dresser le tableau de variation complet de f . En déduire que si $x \in [0; 1]$, alors $f(x) \in [0; 0,5]$.
- 2► Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1} \leq 0,5$.
- 3► Sur le document en **annexe**, représenter sur l'axe des abscisses les 4 premiers termes de (u_n) .
(La qualité et la précision de la représentation sera évaluée.)

Exercice 2

Soit $ABCDEFGH$ un cube.

- 1► Justifier que $\mathcal{R} = (A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est un repère de l'espace.

Soient I le milieu de $[AB]$ et J le point tel que $\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.

L'objectif est de montrer que les points I , J et G sont alignés.

- 2► Déterminer les coordonnées de I , J et G dans $\mathcal{R}$.
- 3► En déduire les coordonnées de $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IG}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.
- 4► Conclure.

Exercice 3

Soit $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de l'espace. On considère les trois vecteurs suivants :

$$\vec{u} = 2\vec{i} + 4\vec{k} \quad \vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \quad \vec{w} = 2\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$$

Soient a , b et c trois réels.

- 1► Déterminer les coordonnées de $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$ dans $\mathcal{B}$.
- 2► On suppose que $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$. Justifier que cela équivaut au système
$$\begin{cases} 2a + 2b + 2c = 0 \\ b - c = 0 \\ 4a - b + 5c = 0 \end{cases}.$$
- 3► Déterminer a , b et c .
- 4► Que peut-on en conclure sur $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$?

Exercice 4

Soit $ABCD$ un quadrilatère. Soient I , J , K et L les milieux de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.

- 1► Montrer que $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{IJ}$.
- 2► Montrer que $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{LK}$.
- 3► En déduire que $IJKL$ est un parallélogramme.

Problème

Alice s'intéresse à l'isolation thermique de sa maison. Elle réalise quelques mesures :

- ▶ La température extérieure est de 5°C (on la considérera constante durant tout le problème).
- ▶ À 22h00, il fait environ 20°C à l'intérieur de la maison.
- ▶ Le lendemain à 8h00, il fait environ $17,3^{\circ}\text{C}$ à l'intérieur de la maison (Alice n'a pas allumé le chauffage dans cet intervalle).

Partie A : premier modèle

On suppose que la variation de température à l'intérieur de la maison est constante, c'est-à-dire que la baisse de température est la même heure après heure.

- 1▶ Selon ce modèle, quelle serait la température à l'intérieur de la maison le lendemain à 22h00 ?
- 2▶ Ce modèle semble-t-il pertinent ?

Partie B : second modèle

On note T_n la température en degrés Celcius après n heures. On considère la première heure comme l'heure 0. Ainsi, $T_0 = 20$ et $T_{10} = 17,3$. La loi de Newton stipule que la variation de température est proportionnelle à l'écart de température entre l'intérieur et l'extérieur. On modélisera donc l'évolution de température par la relation suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$T_{n+1} - T_n = -0,02(T_n - 5)$$

- 1▶ Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+1} = 0,98T_n + 0,1$.
- 2▶ Calculer T_1 et T_2 . On donnera des valeurs arrondies au dixième. Interpréter ces valeurs.
- 3▶
 - a▶ Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n \geq 5$.
 - b▶ Étudier le sens de variation de (T_n) .
 - c▶ Cela est-il cohérent avec la situation ?
- 4▶ On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = T_n - 5$.
 - a▶ Montrer que (U_n) est géométrique de raison 0,98 dont on précisera le premier terme.
 - b▶ En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n = 5 + 15 \times 0,98^n$
- 5▶ La qualité de l'isolation thermique est quantifiée par le coefficient k dans la loi de Newton $T_{n+1} - T_n = -k(T_n - 5)$ (par exemple, le coefficient dans la première partie est $k = 0,02$). Alice a ajouté de la laine de verre pour améliorer l'isolation de son logement. Elle a relevé dans le tableau suivant la température (arrondie au centième) à intervalle régulier avec cette nouvelle isolation. Estimez le nouveau coefficient k .

Temps (heures)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Température ($^{\circ}\text{C}$)	20,00	19,85	19,70	19,55	19,41	19,26	19,12	18,98	18,84	18,70	18,57

