

Corrigé du devoir surveillé 3

Exercice 1 : QCM exclusif non justifié

- 1► On considère trois suites réelles (u_n) , (v_n) et (w_n) telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n \leq w_n$.

Si, pour tout entier $n \geq 1$, on a $u_n = \frac{2n^2 - 1}{n^2}$ et $w_n = \frac{2n^2 + 3}{n^2}$, alors :

a► $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$

b► $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 2$

c► $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -1$

d► La suite (v_n) n'a pas de limite

On remarque que $u_n = 2 - \frac{1}{n^2} \rightarrow 2$ et $w_n = 2 + \frac{3}{n^2} \rightarrow 2$ donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 2$.

- 2► On considère une suite réelle (u_n) .

Si, pour tout entier $n > 0$, on a $\frac{2}{n^2} \leq u_n \leq 1 + \frac{1}{n}$, alors (u_n) est :

a► croissante

b► bornée

c► convergente

d► divergente

On ne peut rien dire d'autre que $0 \leq \frac{2}{n^2} \leq u_n \leq 1 + \frac{1}{n} \leq 2$, donc (u_n) est bornée.

- 3► On considère deux suites réelles (u_n) et (v_n) .

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ alors :

a► $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = 0$

b► $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n = -\infty$

c► $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = -1$

d► $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n^2} = 0$

Limite d'un produit.

- 4► On considère une suite réelle (u_n) .

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^2 = +\infty$ alors :

a► $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

b► $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} = +\infty$

c► $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^3 = +\infty$

d► $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^4 = +\infty$

Limite d'un produit : si $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \times a_n = +\infty$. Ici, $a_n = u_n^2$.

- 5► Dans une association de 30 personnes, on doit élire un président, un adjoint, un secrétaire et un trésorier. Combien de choix y a-t-il ?

a► 4!

b► 30!

c► A_{30}^4

d► $\binom{30}{4}$

Il s'agit de choisir 4 personnes distinctes parmi un groupe, avec ordre car ils jouent des rôles précis : c'est un arrangement.

- 6► Combien y a-t-il de manières de choisir 4 joueurs parmi 14 d'une équipe ?

a► 14!

b► $\binom{14}{4}$

c► A_{14}^4

d► 4!

Il s'agit de choisir 4 personnes distinctes dans un groupe, sans ordre car ils jouent des rôles interchangeables : c'est une combinaison.

Exercice 2 : Suite arithmético-géométrique

Soit (u_n) définie par $u_0 = 100$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,5u_n + 1$.

- 1► Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}_n$: « $0 \leq u_n \leq u_{n+1}$ ».

INIT

Remarquons que $u_1 = 51$ donc $0 \leq u_1 \leq u_0$.

HYP

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}_n$ vraie.

D'après $\mathcal{P}_n$,

HÉRÉDITÉ

$$\begin{array}{lll} \text{Donc} & 0 \leq u_n \leq u_{n+1} & \\ \text{Donc} & 0 \leq 0,5u_{n+1} \leq 0,5u_n & (\text{car } 0,5 > 0) \\ \text{Donc} & 0 \leq 1 \leq 0,5u_{n+1} + 1 \leq 0,5u_n + 1 & \\ \text{Donc} & 0 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} & \end{array}$$

Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

CCL

On a montré que $\mathcal{P}_0$ est vraie et que $\mathcal{P}_n$ est héréditaire, donc d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$ est vraie, c'est-à-dire que $0 \leq u_n \leq u_{n+1}$.

- 2► D'après la question précédente, (u_n) est décroissante.
 3► D'après les questions précédentes, (u_n) est décroissante et minorée, donc d'après le théorème de convergence monotone, (u_n) converge.

Exercice 3 : Dénombrement

- 1► Il y a 7 chiffres qui restent à choisir pour un numéro commençant par 06 7. Pour chaque chiffre, il y a 10 possibilités qui peuvent être répétées, donc 10^7 choix. De même pour les numéros commençant par 06 8. Il y a donc 2×10^7 numéros possibles.
 2► Il s'agit de placer 6 pions parmi 16 cases, il y a $\binom{16}{6} = 8008$ possibilités.
 3► ► Pour LAITUE : il y a 6 lettres distinctes, donc un anagramme de LAITUE est une permutation de ses lettres : il y a $6! = 720$ possibilités.
 ► Pour FEMMES : il y a 1 F et 1 S à placer, ainsi que 2 E et 2 M. Pour choisir un anagramme de FEMMES, on peut permuter ses lettres ($6! = 720$ possibilités), mais ce faisant on compte 2 fois les situations où les E sont interchangés, et de même pour les M. Il y a donc en réalité $720 \div 2 \div 2 = 180$ anagrammes de FEMMES.

Exercice 4 : Démonstration de cours – Formule de Pascal

Version par dénombrement : Soit $E = \llbracket 1, n+1 \rrbracket$. C'est un ensemble de cardinal $n+1$.

- 1► $\binom{n+1}{k+1}$ est le nombre de parties de E à $k+1$ éléments.
 2► Les parties de E à $k+1$ éléments se divisent en deux groupes :
 ► Les parties qui ne contiennent pas 1 : il y en a $\binom{n}{k+1}$ (il faut choisir les $k+1$ dans E sans prendre 1, c'est-à-dire $k+1$ éléments parmi n choix)
 ► Les parties qui contiennent 1 : il y en a $\binom{n}{k}$ (il faut choisir les k autres dans E sans prendre 1 (puisqu'on l'a déjà pris), c'est-à-dire k éléments parmi n choix)

Il y a donc $\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$ possibilités.

Ainsi, $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$

Version par calcul :

$$\begin{aligned}
 \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!} \\
 &= \frac{n!}{k!(n-k)(n-k-1)!} + \frac{n}{(k+1)k!(n-k-1)!} \\
 &= \frac{n!}{k!(n-k-1)!} \left[\frac{1}{(n-k)} + \frac{1}{(k+1)} \right] \\
 &= \frac{n!}{k!(n-k-1)!} \left[\frac{(k+1) + (n-k)}{(n-k)(k+1)} \right] \\
 &= \frac{n!}{k!(n-k-1)!} \left[\frac{n+1}{(n-k)(k+1)} \right] \\
 &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-(k+1))!} \\
 &= \binom{n+1}{k+1}
 \end{aligned}$$