

Devoir surveillé 3

Vous disposez de 1h50 pour effectuer le travail.

Vous pouvez traiter les exercices dans l'ordre de votre choix.

Calculatrice et documents interdits.

Si vous pensez que le sujet contient une erreur, indiquez-le et répondez à la question en conséquence.

Toute trace de recherche sera évaluée.

Soignez votre rigueur de rédaction : privilégiez la qualité à la quantité...

Sujet du devoir surveillé 3

Exercice 1 : QCM exclusif non justifié

Les six questions sont indépendantes. Pour chaque question, quatre réponses sont proposées, **dont une seule est exacte**. Le candidat choisira au plus une réponse pour chaque question (celle qu'il juge exacte). **Aucune justification n'est demandée**.

Une réponse exacte apporte 3 point, une réponse fausse *enlève* 1 point. Pour chaque question, si deux réponses ont été choisies ou si aucune réponse n'a été choisie, la question rapporte 0 point. Enfin, si le total de l'exercice est négatif, il est ramené à zéro.

1► On considère trois suites réelles (u_n) , (v_n) et (w_n) telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n \leq w_n$.

Si, pour tout entier $n \geq 1$, on a $u_n = \frac{2n^2 - 1}{n^2}$ et $w_n = \frac{2n^2 + 3}{n^2}$, alors :

- a► $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$ b► $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 2$ c► $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -1$ d► La suite (v_n) n'a pas de limite

2► On considère une suite réelle (u_n) .

Si, pour tout entier $n > 0$, on a $\frac{2}{n^2} \leq u_n \leq 1 + \frac{1}{n}$, alors (u_n) est :

- a► croissante b► bornée c► convergente d► divergente

3► On considère deux suites réelles (u_n) et (v_n) .

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ alors :

- a► $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = 0$ b► $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n = -\infty$ c► $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = -1$ d► $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n^2} = 0$

4► On considère une suite réelle (u_n) .

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^2 = +\infty$ alors :

- a► $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ b► $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} = +\infty$ c► $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^3 = +\infty$ d► $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^4 = +\infty$

5► Dans une association de 30 personnes, on doit élire un président, un adjoint, un secrétaire et un trésorier. Combien de choix y a-t-il ?

- a► 4! b► 30! c► A_{30}^4 d► $\binom{30}{4}$

6► Combien y a-t-il de manières de choisir 4 joueurs parmi 14 d'une équipe ?

- a► 14! b► $\binom{14}{4}$ c► A_{14}^4 d► 4!

Exercice 2 : Suite arithmético-géométrique

Soit (u_n) définie par $u_0 = 100$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,5u_n + 1$.

- 1► Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_{n+1} \leq u_n$.
- 2► Quelle est la monotonie de (u_n) ?
- 3► La suite (u_n) converge-t-elle ?

Exercice 3 : Dénombrement

- 1► En France, un numéro de téléphone comporte 10 chiffres au total. Les préfixes des numéros de téléphone sont attribués à des opérateurs téléphoniques. Orange possède tous les numéros commençant par 06 7 et 06 8. Combien cela représente-t-il de numéros ?
- 2► Sur une grille de seize cases, on souhaite placer six pions, indiscernables les uns des autres. Une case ne peut comporter qu'un seul pion au maximum. De combien de manières peut-on procéder ?
- 3► Combien peut-on former d'anagrammes (= mélanger les lettres) du mot « LAITUE » ? et du mot « FEMMES » ?

Exercice 4 : Démonstration de cours – Formule de Pascal

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout entier k entre 0 et n ,

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Exercice bonus

Ne sera pris en compte que si les autres exercices sont tous traités intégralement

Justifier toutes les réponses du QCM.