

Corrigé du devoir surveillé 4

Exercice 1

- 1► Tout d'abord,

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2-3 \\ 1-0 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -2-3 \\ -5-0 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Remarquons que $1 \times 0 \neq 1 \times (-5)$, donc ces produits en croix ne sont pas égaux, donc les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas proportionnelles, donc ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc A, B et C ne sont pas alignés.

- 2► Comme $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -1 \times (-5) + 1 \times (-5) + 1 \times 0 = 0$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux, donc $\widehat{BAC}$ est droit, donc ABC est rectangle en A .
- 3► *Une façon astucieuse de répondre à cette question de remarquer qu'un plan est caractérisé à la fois par trois points de passage non alignés, et par une équation cartésienne. Ainsi, si on montre que le plan d'équation cartésienne donnée par l'énoncé contient A, B et C , ceux-ci n'étant pas alignés cela justifie que cette équation cartésienne correspond à (ABC) .*

Ci-dessous la méthode générale qui permet de trouver l'équation cartésienne lorsqu'elle n'est pas donnée. Elle est plus longue et fastidieuse que la précédente, mais il faut la maîtriser ! Cependant, préférez la méthode précédente quand l'équation cartésienne est donnée par l'énoncé.

Soit $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ normal à (ABC) . Alors $0 = \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = -a + b + c$ et $0 = \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = -5a - 5b$. De cette seconde équation on déduit que $b = -a$. En substituant ceci dans la première équation, on trouve $c = 2a$. Prenons $a = 1$, de sorte que $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est normal à (ABC) . Il existe donc $d \in \mathbb{R}$ tel que $x - y + 2z + d = 0$ est une équation cartésienne de (ABC) . or $A \in (ABC)$ donc $3 - 0 + 2 \times 1 + d = 0$, donc $d = -5$. Ainsi, $-x + y - 2z + 5 = 0$ est une équation cartésienne de (ABC) .

- 4► Comme (Δ) est orthogonale à (ABC) , le vecteur normal $\vec{n}$ de (ABC) est directeur de (Δ) , et $S \in (\Delta)$, donc une représentation paramétrique de (Δ) est :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 - t \\ z = 4 + 2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

- 5► Notons $H(x_H; y_H; z_H)$. D'une part, $H \in (\Delta)$ donc il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{cases} x_H = 1 + t \\ y_H = -2 - t \\ z_H = 4 + 2t \end{cases}$$

D'autre part, $H \in (ABC)$ donc $x_H - y_H + 2z_H + 5 = 0$, donc :

$$(1 + t) - (-2 - t) + 2(-4 + 2t) + 5 = 0$$

donc

$$6t + 6 = 0$$

donc

$$t = -1$$

et donc les coordonnées de H sont $(1 - 1; -2 - (-1); -4 + 2 \times (-1)) = \boxed{(0; -1; 2)}$.

6►

$$SH = \sqrt{(0-1)^2 + (-1-(-2))^2 + (2-4)^2} = \sqrt{6}$$

7► Le segment $[HB]$ est un rayon de $\mathcal{D}$, et $HB^2 = (0-2)^2 + (-1-1)^2 + (2-2)^2 = 8$, donc l'aire de $\mathcal{D}$ est

$$\boxed{\mathcal{A} = \pi \times HB^2 = 8\pi}.$$

8► Ce cône a pour hauteur SH , donc son volume est :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A} \times SH = \boxed{\frac{8\pi\sqrt{6}}{3}}$$

Exercice 2

1► Les coordonnées de C sont $\boxed{(1; 1; 0)}$ car $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ (on utilise la relation de Chasles et les égalités vectorielles dans le cube).

Les coordonnées de E sont $\boxed{(0; 0; 1)}$.

2► a► Les droites (EG) et (AE) ne sont pas parallèles et sont contenues dans (GEA) , donc $\overrightarrow{EG} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AE} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

dirigent (GEA) . Par ailleurs,

$$\bullet \overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{DB} = 1 \times 1 + 1 \times (-1) + 0 \times 0 = 0$$

$$\bullet \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DB} = 0 \times 1 + 0 \times (-1) + 1 \times 0 = 0$$

donc $\overrightarrow{DB}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs de (GEA) , donc $\overrightarrow{DB}$ est orthogonal à (GEA) .

b► Il existe d tel que $1x + (-1)y + 0z + d = 0$ est une équation cartésienne de (GEA) (car $\overrightarrow{DB}$ en est un vecteur normal d'après la question précédente). Or $A(0; 0; 0) \in (GEA)$, donc $0 - 0 + d = 0$, donc $d = 0$, donc $x - y = 0$ est une équation cartésienne de (GEA) .

3► a►

$$\overrightarrow{KC} = \begin{pmatrix} 1-m \\ 1-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-m \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{EL} = \begin{pmatrix} (1-m)-0 \\ 1-0 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-m \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{KC}$$

Donc $CKEL$ est un parallélogramme.

b►

$$\overrightarrow{KE} = \begin{pmatrix} 0-m \\ 0-0 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc :

$$\overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{KE} = (1-m) \times (-m) + 1 \times 0 + 0 \times 1 = m(m-1)$$

c► Comme $CKEL$ est un parallélogramme, c'est un rectangle si, et seulement si au moins l'un de ses angles est droit, donc $CKEL$ est un rectangle si, et seulement si $\widehat{CKE}$ est droit, ce qui équivaut à ce que $\overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{KE} = 0$, ce qui équivaut à ce que $m(m-1) = 0$, ce qui est équivalent à ce que $m = 0$ ou $m = 1$.

4► a►

$$KE^2 = \|\overrightarrow{KE}\|^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 + 1^2 = \frac{5}{4} = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + 0^2 = \|\overrightarrow{KC}\|^2 = KC^2$$

Donc $KE = KC$ (car ce sont des longueurs, donc positives), donc $CKEL$ est un parallélogramme dont deux côtés adjacents ont même longueur, donc $CKEL$ est un losange.

b► D'après la question 3.b►, $\overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{KE} = -\frac{1}{4}$. Or $\overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{KE} = KC \times KE \times \cos(\widehat{CKE}) = \frac{5}{4} \cos(\widehat{CKE})$.

Ainsi,

$$\cos(\widehat{CKE}) = -\frac{1}{5} \quad \text{donc} \quad \widehat{CKE} = \arccos\left(-\frac{1}{5}\right) \approx \boxed{102^\circ}$$