

Sujet du devoir surveillé 6

Exercice 1

- 1► Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.
 - a► Déterminer la fonction dérivée g' puis dresser le tableau de variations de g . On déterminera les limites en l'infini sans justification.
 - b► Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution notée α dans $\mathbb{R}$ et que $1 < \alpha < 2$.
 - c► À l'aide d'un tableau de valeurs sur la calculatrice, déterminer un encadrement de α à 10^{-3} .
 - d► En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .
- 2► Soit la fonction f définie sur $] -1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1-x}{1+x^3}$.
 - a► Déterminer les limites de f en -1 et en $+\infty$.
 - b► Déterminer la fonction dérivée f' et montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x^3)^2}$ où g est la fonction de la question précédente.
 - c► Déterminer le signe de f' sur $] -1; +\infty[$ puis dresser le tableau de variations de f sur $] -1; +\infty[$.
 - d► Calculer $f(1)$. En déduire que l'équation $f(x) = 4$ admet une unique solution sur $] -1; 1]$.
 - e► L'équation $f(x) = 4$ admet-elle une autre solution sur $[1; +\infty[$? Justifier.

Exercice 2

Soit f la fonction définie par $f(x) = 1,4x(1-x)$ sur $[0; 1]$.

- 1► Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$.
- 2► Résoudre l'équation $f(x) = x$.
- 3► Montrer que f est croissante sur $[0; 0,5]$.
- 4► Soit u la suite définie par $u_0 = 0,1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.
Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq u_{n+1} < 0,5$.
- 5► En déduire que u est convergente et déterminer sa limite.